

Indice

1	Interpolazione polinomiale	1
1.1	Esistenza, unicità e forma di Lagrange del polinomio di interpolazione	1
1.2	Resto dell'interpolazione polinomiale	6
1.3	Forma di Newton del polinomio di interpolazione	7
1.4	Algoritmo per la valutazione del polinomio di interpolazione in un punto	9
1.5	Applicazione dell'interpolazione polinomiale: formula dei trapezi	12
2	Approssimazione ai minimi quadrati nel discreto	15
2.1	Il problema generale dei minimi quadrati nel discreto	15
2.2	Il caso polinomiale	18

1 Interpolazione polinomiale¹

1.1 Esistenza, unicità e forma di Lagrange del polinomio di interpolazione

È data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ negli $n + 1$ punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Si sceglie una classe \mathcal{C} di funzioni definite su $[a, b]$ a valori in \mathbb{R} e si vuole approssimare la funzione $f(x)$ con una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che appartiene alla classe \mathcal{C} e che nei punti x_0, x_1, \dots, x_n assume i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Una scelta comune è quella di prendere \mathcal{C} come lo spazio vettoriale (reale) dei polinomi di grado $\leq n$, ovvero $\mathcal{C} = \mathbb{R}_n[x]$. In questo caso, esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Questo fatto è conseguenza del Teorema 1.

Teorema 1. *Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tali che x_0, x_1, \dots, x_n sono tutti distinti. Allora esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$.*

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni di questo teorema, entrambe istruttive.

1. Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}_n[x]$ soddisfa la proprietà che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$ se e solo se

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n = y_2 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

cioè se e solo se il suo vettore dei coefficienti $(a_0, a_1, \dots, a_n)^T$ soddisfa il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

¹Capitolo 5 del libro [1] riportato in bibliografia.

La matrice (quadrata) $V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ si chiama *matrice di Vandermonde sui nodi*

x_0, \dots, x_n ed è invertibile perché tra poco dimostreremo che

$$\det[V(x_0, \dots, x_n)] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \prod_{\substack{i,j=0 \\ j < i}}^n (x_i - x_j) = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) & \text{se } n \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

da cui segue che $\det[V(x_0, \dots, x_n)] \neq 0$ in quanto x_0, \dots, x_n sono distinti per ipotesi. Quindi esiste un'unica soluzione del sistema (1), e questa soluzione è

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [V(x_0, \dots, x_n)]^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad (3)$$

ciò significa che esiste un unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$, e questo polinomio è precisamente quello che ha il vettore dei coefficienti dato dalla (3).

Per concludere la dimostrazione ci resta solo da dimostrare la (2) e lo facciamo nel caso $n = 3$.² Per $i = 1, \dots, 3$ definiamo $d_i = \det[V(x_0, \dots, x_i)]$. Il nostro obiettivo è quello di calcolare $d_3 = \det[V(x_0, \dots, x_3)]$. Per $j = 4, \dots, 2$, sottraiamo dalla colonna j di $V(x_0, \dots, x_3)$ la colonna $j - 1$ moltiplicata per x_3 , dopodiché sviluppiamo il determinante lungo l'ultima riga; in questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} d_3 &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 - x_0^2 x_3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 - x_1^2 x_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2 x_3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_0 x_3 & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_1 x_3 & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_3 & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3(x_0 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3(x_0 - x_3)(x_1 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3(x_0 - x_3)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)d_2. \end{aligned}$$

² La (2) vale sicuramente se $n = 0$ perché $V(x_0) = [1]$; la dimostrazione nel caso generale $n \geq 1$ è del tutto analoga a quella che facciamo noi per $n = 3$.

Per ricorrenza, anche d_2 ammette uno sviluppo analogo a d_3 e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} d_3 &= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)d_2 = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)d_1 \\ &= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot (x_1 - x_0), \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale perché $d_1 = \det[V(x_0, x_1)] = x_1 - x_0$.

2. Per ogni $j = 0, \dots, n$ definiamo il polinomio

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Gli $n+1$ polinomi $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ hanno tutti grado n e quindi appartengono a $\mathbb{R}_n[x]$. Mostriamo ora che essi costituiscono una base di $\mathbb{R}_n[x]$ e per fare questo è sufficiente dimostrare che essi sono linearmente indipendenti, in quanto essi sono in numero di $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.

Per dimostrare che $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono linearmente indipendenti, osserviamo che per ogni $i, j = 0, 1, \dots, n$ si ha

$$L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Se $\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \dots + \alpha_n L_n(x)$ è una combinazione lineare che coincide con il polinomio nullo, cioè tale che $\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \dots + \alpha_n L_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora in particolare deve essere $\alpha_0 L_0(x_i) + \alpha_1 L_1(x_i) + \dots + \alpha_n L_n(x_i) = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$, cioè $\alpha_0 \delta_{i0} + \dots + \alpha_n \delta_{in} = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$, cioè $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Questo mostra che $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono linearmente indipendenti e pertanto sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

Definiamo il polinomio $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$. $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ e per ogni $i = 0, \dots, n$ si ha $p(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i$. Quindi abbiamo provato l'esistenza di un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i .

Supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i . Poiché $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ è una base di $\mathbb{R}_n[x]$, esistono $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tali che $q(x) = \beta_0 L_0(x) + \beta_1 L_1(x) + \dots + \beta_n L_n(x)$. Valutando $q(x)$ nei nodi x_i otteniamo che per ogni $i = 0, \dots, n$ si ha

$$y_i = q(x_i) = \beta_0 L_0(x_i) + \beta_1 L_1(x_i) + \dots + \beta_n L_n(x_i) = \beta_i,$$

da cui si ricava che $q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = p(x)$. Questo prova che $p(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i . \square

Osservazione 1. Dati $n+1$ punti $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, la matrice

$$V(z_0, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^n \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}$$

si chiama matrice di Vandermonde relativa a z_0, \dots, z_n . Si può dimostrare in modo identico a come abbiamo fatto nella prima dimostrazione del Teorema 1 che, per ogni $n \geq 0$ e ogni sequenza z_0, \dots, z_n di punti in \mathbb{C} ,

$$\det[V(z_0, \dots, z_n)] = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^n (z_i - z_j) & \text{se } n \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

Un altro modo per dimostrare la (4) è quello di utilizzare il teorema fondamentale dell'algebra. Osserviamo che se $n = 0$ la (4) segue dal fatto che $V(z_0) = [1]$. Se $n \geq 1$ e se esistono due punti z_i, z_j che coincidono, allora $V(z_0, \dots, z_n)$ è singolare (avendo almeno due righe uguali) e quindi il suo determinante è nullo, in accordo alla (4). Dunque la (4) va dimostrata solo nel caso in cui $n \geq 1$ e i punti z_0, \dots, z_n sono tutti distinti. In tal caso, consideriamo la seguente funzione che si ottiene sostituendo z_n con z nell'espressione $\det[V(z_0, \dots, z_n)]$:

$$D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad D(z) = \det[V(z_0, \dots, z_{n-1}, z)].$$

$D(z_n)$ è il valore che vogliamo calcolare. Per le proprietà del determinante, $D(z)$ è un polinomio in $\mathbb{C}_n[z]$ (come si vede sviluppando il determinante lungo l'ultima riga) e inoltre $D(z)$ si annulla negli n punti distinti z_0, \dots, z_{n-1} . Quindi z_0, \dots, z_{n-1} sono precisamente tutti gli zeri del polinomio $D(z)$ in \mathbb{C} . Grazie al teorema fondamentale dell'algebra (o anche semplicemente grazie al teorema di Ruffini), $D(z)$ si fattorizza come

$$D(z) = c(z - z_0) \cdots (z - z_{n-1}),$$

dove c è il coefficiente di z^n che, come si vede sviluppando il determinante $D(z)$ lungo l'ultima riga, risulta uguale a $\det[V(z_0, \dots, z_{n-1})]$. In conclusione,

$$D(z) = \det[V(z_0, \dots, z_{n-1})](z - z_0) \cdots (z - z_{n-1}).$$

Valutando in $z = z_n$, si ottiene la formula

$$\det[V(z_0, \dots, z_n)] = D(z_n) = (z_n - z_0) \cdots (z_n - z_{n-1}) \cdot \det[V(z_0, \dots, z_{n-1})],$$

valida per ogni $n \geq 1$ e per ogni sequenza z_0, \dots, z_n di punti distinti in \mathbb{C} . Sviluppando per ricorrenza questa formula si ottiene infine

$$\begin{aligned} \det[V(z_0, \dots, z_n)] &= (z_n - z_0) \cdots (z_n - z_{n-1}) \cdot \det[V(z_0, \dots, z_{n-1})] \\ &= (z_n - z_0) \cdots (z_n - z_{n-1}) \cdot (z_{n-1} - z_0) \cdots (z_{n-1} - z_{n-2}) \cdot \det[V(z_0, \dots, z_{n-2})] \\ &= \dots = (z_n - z_0) \cdots (z_n - z_{n-1}) \cdot (z_{n-1} - z_0) \cdots (z_{n-1} - z_{n-2}) \cdot \cdots \cdot (z_1 - z_0) \cdot \underbrace{\det[V(z_0)]}_{=1} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (z_i - z_j). \end{aligned}$$

Definizione 1. Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con x_0, x_1, \dots, x_n punti distinti. L'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ tale che $p(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$ si chiama *polinomio di interpolazione dei valori y_0, \dots, y_n sui nodi x_0, \dots, x_n* .

La prima dimostrazione del Teorema 1 ci dice che $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, dove

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [V(x_0, x_1, \dots, x_n)]^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

e $V(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è la matrice di Vandermonde sui nodi x_0, \dots, x_n .

La seconda dimostrazione del Teorema 1 ci dice che

$$p(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x), \quad (6)$$

dove per ogni $j = 0, 1, \dots, n$,

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}$$

è il j -esimo polinomio di Lagrange relativo ai nodi x_0, \dots, x_n . La (6) si chiama *forma di Lagrange* del polinomio d'interpolazione.

Se gli y_i sono i valori nei punti x_i di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cioè se risulta $f(x_i) = y_i$ per ogni $i = 0, \dots, n$, allora il polinomio $p(x)$ si chiama anche *polinomio di interpolazione della funzione $f(x)$ sui nodi x_0, \dots, x_n* .

Esempio 1. Consideriamo la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. Di questa funzione sono noti i valori nei tre punti $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi/4$ e questi valori sono rispettivamente $\sin(x_0) = 0$, $\sin(x_1) = 1/2$, $\sin(x_2) = 1/\sqrt{2}$. Vogliamo scrivere il polinomio di interpolazione della funzione $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 .

Utilizzando la (6) si ha immediatamente che il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, x_2 è

$$\begin{aligned} p(x) &= \sin(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \sin(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \sin(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x(x-\pi/4)}{-\pi^2/72} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x(x-\pi/6)}{\pi^2/48}. \end{aligned}$$

Un controllo diretto permette di verificare che effettivamente $p(x_0) = 0$, $p(x_1) = 1/2$, $p(x_2) = 1/\sqrt{2}$. Sviluppando i calcoli possiamo riscrivere il polinomio nella forma canonica

$$p(x) = \frac{24\sqrt{2}-36}{\pi^2} x^2 + \frac{9-4\sqrt{2}}{\pi} x.$$

Dalla (5) sappiamo che il vettore dei coefficienti di $p(x)$ è dato da

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \left[V \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e quindi, senza fare alcun conto, possiamo concludere immediatamente che

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \left[V \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (9-4\sqrt{2})/\pi \\ (24\sqrt{2}-36)/\pi^2 \end{pmatrix}.$$

L'ultima uguaglianza può essere verificata anche con un calcolo esplicito:

$$V \left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ (9-4\sqrt{2})/\pi \\ (24\sqrt{2}-36)/\pi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1. Scrivere il polinomio che interpola i valori $y_0 = 2$, $y_1 = 2.4$, $y_2 = 2.8$, $y_3 = 3.2$ sui nodi $x_0 = 1$, $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 1.6$.

Esercizio 2. Scrivere il polinomio di interpolazione della funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, sui nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 0.16$, $x_2 = 0.49$, $x_3 = 0.81$, $x_4 = 1$.

Esercizio 3. Siano $L_0(x), \dots, L_n(x)$ i polinomi di Lagrange relativi a $n+1$ nodi distinti $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la loro somma è identicamente uguale a 1:

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

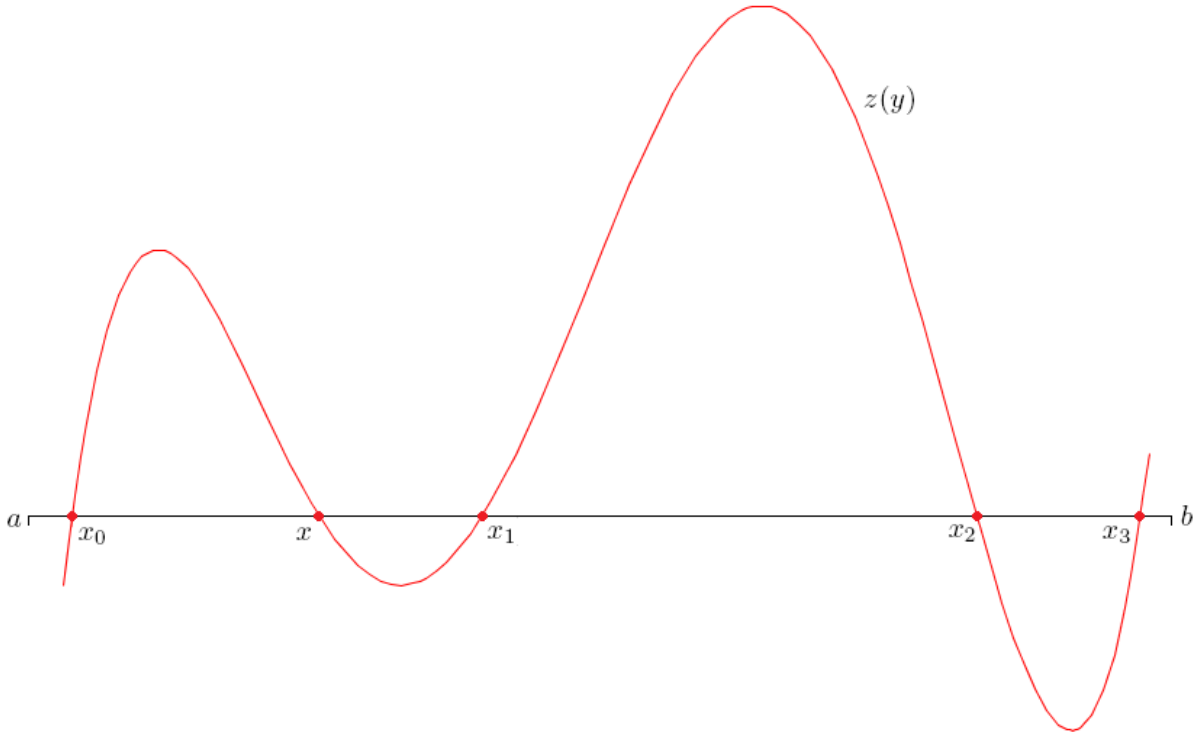


Figura 1: illustrazione di $z(y)$ nel caso $n = 3$.

1.2 Resto dell'interpolazione polinomiale

Teorema 2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}[a, b]$ e sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sugli $n + 1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Allora, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un punto $\xi = \xi(x) \in (a, b)$ tale che

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (7)$$

Dimostrazione. Sia $x \in [a, b]$. Se x coincide con un nodo x_i allora la (7) è verificata con un qualsiasi $\xi \in (a, b)$ (entrambi i membri sono nulli). Supponiamo ora che x non coincida con uno dei nodi x_i . Definiamo $\pi(y) = (y - x_0)(y - x_1) \cdots (y - x_n)$ e $r(y) = f(y) - p(y)$, e consideriamo la funzione

$$z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(y) = r(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)} \pi(y)$$

(si veda la Figura 1). Questa funzione è di classe $C^{n+1}[a, b]$ e si annulla in almeno $n + 2$ punti di $[a, b]$ dal momento che si annulla negli $n + 1$ nodi x_0, x_1, \dots, x_n e anche nel punto x . Pertanto, per il teorema di Rolle, $z'(y)$ si annulla in almeno $n + 1$ punti di (a, b) ; analogamente $z''(y)$ si annulla in almeno n punti di (a, b) , $z'''(y)$ si annulla in almeno $n - 1$ punti di (a, b) , e così via fino ad avere che $z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno un punto $\xi \in (a, b)$. Dunque, poiché $p^{(n+1)}(y)$ è identicamente nullo (perché $p(y)$ ha grado $\leq n$) e poiché $\pi^{(n+1)}(y) = (n + 1)!$ (perché $\pi(y)$ ha grado $n + 1$ ed è monico), si ha

$$\begin{aligned} 0 &= z^{(n+1)}(\xi) = r^{(n+1)}(\xi) - \frac{r(x)}{\pi(x)} \pi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\pi(x)} (n + 1)! \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)} (n + 1)! \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

Esempio 2. Ricordiamo dall'Esempio 1 che il polinomio di interpolazione della funzione $f(x) = \sin(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = \pi/6, x_2 = \pi/4$ è $p(x) = \frac{24\sqrt{2} - 36}{\pi^2}x^2 + \frac{9 - 4\sqrt{2}}{\pi}x$. Sia $t \in [0, 1]$. Vogliamo stimare l'errore che si commette approssimando $\sin(t)$ con $p(t)$.

Si ha $f \in C^\infty[0, 1]$ e $f'''(x) = -\cos(x)$. Dalla (7) abbiamo che

$$\begin{aligned} |\sin(t) - p(t)| &= \frac{|-\cos \xi|}{3!} |(t - x_0)(t - x_1)(t - x_2)| \quad (\xi \text{ è un punto in } (0, 1)) \\ &= \frac{\cos \xi}{6} |t(t - \pi/6)(t - \pi/4)| \leq \frac{1}{6} \cdot \max_{x \in [0, 1]} \cos(x) \cdot \max_{x \in [0, 1]} |x(x - \pi/6)(x - \pi/4)| \\ &\leq \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \max_{x \in [0, 1]} |x| |x - \pi/6| |x - \pi/4| \leq \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \pi/6 \cdot \pi/4 \approx 0.0685. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x) = \arctan x$.

- Scrivere il polinomio di interpolazione $p(x)$ della funzione $f(x)$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = \sqrt{3}$.
- Per ogni fissato $t \in [0, 2]$, stimare l'errore $|\arctan t - p(t)|$ che viene commesso approssimando $\arctan t$ con $p(t)$.

Esercizio 5. Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$. Per ogni fissato $t \in [0, 1]$, stimare l'errore che si commette approssimando $\sin(t)$ con $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio di interpolazione di $\sin(t)$ sui nodi $x_0 = 0, x_1 = \pi/10, x_2 = \pi/6, x_3 = \pi/4, x_4 = 3\pi/10$. Confrontare la stima ottenuta con quella dell'Esempio 2. Osservare che per risolvere l'esercizio non è necessario conoscere $p(x)$.

Esercizio 6. Si consideri la funzione \sqrt{x} . Stimare l'errore che si commette approssimando $\sqrt{2}$ con $p(2)$, dove $p(x)$ è il polinomio di interpolazione di \sqrt{x} sui nodi 1.69, 1.7689, 1.8769, 1.96, 2.0449, 2.1609, 2.25.

1.3 Forma di Newton del polinomio di interpolazione

Abbiamo visto la forma di Lagrange (6) per rappresentare il polinomio di interpolazione; vediamo ora un'altra forma di rappresentazione.

Definizione 2. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

- Se $y \in [a, b]$, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y il numero $f[y] = f(y)$.
- Se $y_1, \dots, y_k \in [a, b]$ sono $k \geq 2$ punti distinti, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y_1, \dots, y_k il numero

$$f[y_1, \dots, y_k] = \frac{f[y_1, \dots, y_{k-2}, y_k] - f[y_1, \dots, y_{k-1}]}{y_k - y_{k-1}}$$

(se $k = 2$, risulta $k - 2 < 1$ e la formula precedente fornisce

$$f[y_1, y_2] = \frac{f[y_2] - f[y_1]}{y_2 - y_1} = \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1},$$

per cui $f[y_1, y_2]$ è il rapporto incrementale di f relativo ai punti y_1, y_2).

Teorema 3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti. Allora, per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n). \end{aligned} \quad (8)$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che per ogni $k = 0, 1, \dots, n$ si ha

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \\ + f[x_0, \dots, x_k, x](x - x_0) \cdots (x - x_k), \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_k\}. \quad (9)$$

La tesi è semplicemente la (9) per $k = n$.

Per $k = 0$ l'uguaglianza in (9) diventa $f(x) = f[x_0] + f[x_0, x](x - x_0)$, ed essa è vera per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ per definizione delle differenze divise. Infatti, per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f[x_0] + f[x_0, x](x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f(x).$$

Supponiamo ora che la (9) sia vera per un certo k con $0 \leq k < n$; mostriamo che è vera anche per $k + 1$. Per $k + 1$ la (9) diventa

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \cdots (x - x_k) \\ + f[x_0, \dots, x_{k+1}, x](x - x_0) \cdots (x - x_{k+1}), \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_{k+1}\}, \quad (10)$$

ed è vera perché, per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_{k+1}\}$, il secondo membro della (10) è

$$f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \cdots (x - x_k) \\ + f[x_0, \dots, x_{k+1}, x](x - x_0) \cdots (x - x_{k+1}) \\ = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \cdots (x - x_k) \\ + \frac{f[x_0, \dots, x_k, x] - f[x_0, \dots, x_k, x_{k+1}]}{x - x_{k+1}}(x - x_0) \cdots (x - x_{k+1}) \quad (\text{per definizione delle differenze divise}) \\ = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_{k+1}](x - x_0) \cdots (x - x_k) \\ + (f[x_0, \dots, x_k, x] - f[x_0, \dots, x_k, x_{k+1}])(x - x_0) \cdots (x - x_k) \\ = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) \\ + f[x_0, \dots, x_k, x](x - x_0) \cdots (x - x_k) = f(x),$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché, per ipotesi di induzione, la (9) è vera per l'indice k . □

Teorema 4. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti. Allora il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n è

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (11)$$

La (11) si chiama *forma di Newton del polinomio di interpolazione*.

Dimostrazione. Il polinomio $p(x)$ definito dalla (11) appartiene a $\mathbb{R}_n[x]$. Pertanto, ricordando il Teorema 1, per dimostrare che $p(x)$ è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n basta dimostrare che $p(x_i) = f(x_i)$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Si ha $p(x_0) = f[x_0] = f(x_0)$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$p(x_i) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_i - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x_i - x_0)(x_i - x_1) + \dots + f[x_0, \dots, x_i](x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1}) \\ = f(x_i),$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene valutando in $x = x_i$ la formula (9) per $k = i - 1$. Dunque $p(x)$ è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n . □

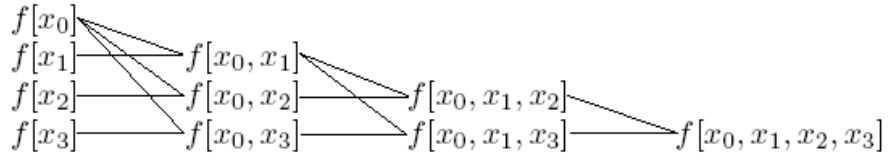


Figura 2: tabella per il calcolo delle differenze divise.

Corollario 1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sugli $n + 1$ nodi distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Allora, per ogni $x \in [a, b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ si ha

$$f(x) - p(x) = f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_0) \cdots (x - x_n). \quad (12)$$

Inoltre, $f[x_0, \dots, x_n]$ non cambia se vengono permutati i suoi $n + 1$ argomenti, ossia

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \quad \text{per ogni permutazione } \sigma \text{ dell'insieme } \{0, \dots, n\}.$$

Dimostrazione. La (12) si ottiene sottraendo la (8) e la (11). Inoltre, per ogni permutazione σ dell'insieme $\{1, \dots, n\}$, $f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ perché entrambi i membri sono il coefficiente direttore di $p(x)$, il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, \dots, x_n , e $p(x)$ non dipende dall'ordinamento dei nodi. \square

1.4 Algoritmo per la valutazione del polinomio di interpolazione in un punto

Grazie alla forma di Newton, è possibile costruire un algoritmo per valutare in un punto il polinomio di interpolazione che risulta essere buono dal punto di vista del costo computazionale. In questa sezione lo descriviamo e ne calcoliamo il costo computazionale.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti e sia $t \in \mathbb{R}$. Si vuole costruire un algoritmo per calcolare $p(t)$, dove $p(x)$ è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n . Per maggiore chiarezza illustriamo l'algoritmo supponendo che sia $n = 3$, cosicché, per la (11), il polinomio $p(x)$ è dato da

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2). \quad (13)$$

La prima parte dell'algoritmo è *indipendente dal punto* t in cui $p(x)$ deve essere valutato e consiste nel calcolare le differenze divise che compaiono nella (13). Questo calcolo viene effettuato servendosi della tabella riportata in Figura 2. Le differenze divise che devono essere calcolate vengono pensate come gli elementi di una matrice triangolare inferiore A di ordine 4 e precisamente si pone

$$a_{ij} = f[x_0, \dots, x_{j-2}, x_{i-1}] \quad \text{per ogni } i, j \text{ tali che } 1 \leq j \leq i \leq 4$$

(se $j = 1$, risulta $j - 2 < 0$ e la formula precedente è da intendere come

$$a_{i1} = f[x_{i-1}] = f(x_{i-1}) \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, 4,$$

si veda la prima colonna della Figura 2). Ricordando la Definizione 2, per ogni i, j tali che $2 \leq j \leq i \leq 4$, si ha

$$a_{ij} = f[x_0, \dots, x_{j-2}, x_{i-1}] = \frac{f[x_0, \dots, x_{j-3}, x_{i-1}] - f[x_0, \dots, x_{j-2}]}{x_{i-1} - x_{j-2}} = \frac{a_{i,j-1} - a_{j-1,j-1}}{x_{i-1} - x_{j-2}}. \quad (14)$$

La (14) permette di calcolare le differenze divise ricorsivamente secondo lo schema mostrato nella tabella in Figura 2, tenendo conto che i numeri della prima colonna, ossia $f[x_0] = f(x_0), \dots, f[x_3] = f(x_3)$, sono noti.

Una volta calcolate le differenze divise, per calcolare $p(t)$ si usa un algoritmo analogo a quello di Ruffini-Horner: ricordando la (13), si scrive $p(t)$ nella forma

$$p(t) = f[x_0] + (t - x_0) \left(f[x_0, x_1] + (t - x_1) \left(f[x_0, x_1, x_2] + (t - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] \right) \right)$$

e si pone

$$h_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3],$$

$$h_i = f[x_0, \dots, x_i] + (t - x_i) h_{i+1} \quad \text{per ogni } i = 2, 1, 0.$$

h_0 è proprio $p(t)$.

Valutiamo il costo computazionale dell'algoritmo. Per calcolare le differenze divise della tabella in Figura 2 si devono calcolare mediante la (14) gli elementi a_{ij} per $2 \leq j \leq i \leq 4 = n + 1$. Questi sono in totale $6 = \frac{n(n+1)}{2}$ elementi e per il calcolo di ciascuno sono richieste 2 sottrazioni e 1 divisione. Quindi il costo computazionale del calcolo delle differenze divise è il seguente:

- $2 \cdot 6 = n(n + 1)$ sottrazioni,
- $1 \cdot 6 = \frac{n(n+1)}{2}$ divisioni.

Una volta calcolate le differenze divise, restano da calcolare gli h_i per $i = 2, \dots, 0$ ($h_3 = h_n$ non va calcolato perché è una differenza divisa che è già stata calcolata). Per il calcolo di ciascun h_i sono richieste 1 sottrazione per calcolare $t - x_i$, 1 moltiplicazione per calcolare $(t - x_i)h_{i+1}$ e 1 addizione per calcolare $f[x_0, \dots, x_i] + (t - x_i)h_{i+1}$. Quindi il costo computazionale del calcolo di h_2, \dots, h_0 (cioè di h_{n-1}, \dots, h_0) è il seguente:

- $1 \cdot 3 = n$ sottrazioni,
- $1 \cdot 3 = n$ moltiplicazioni,
- $1 \cdot 3 = n$ addizioni.

Notiamo che una sottrazione è di fatto un'addizione: la sottrazione $\xi - \eta$ coincide con l'addizione $\xi + (-\eta)$ e per il computer mettere un segno meno davanti a η non costa niente (non deve fare nessuna operazione), quindi una sottrazione e un'addizione per il computer costano uguali. Considereremo pertanto le sottrazioni come se fossero delle addizioni e dunque, se indichiamo con A , M , e D rispettivamente le addizioni, le moltiplicazioni e le divisioni, allora il costo complessivo dell'algoritmo è

$$c(n) = (n^2 + 3n) A + nM + \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right) D$$

e in totale vengono eseguite $\frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n$ operazioni.

Osservazione 2. Siccome la prima parte dell'algoritmo consiste nel calcolare le differenze divise ed è indipendente dal punto t in cui $p(x)$ deve essere valutato, per valutare $p(x)$ in m punti $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ si procede nel modo seguente.

- Si calcolano prima le differenze divise come sopra: il costo computazionale è ancora $n(n+1)A + \frac{n(n+1)}{2}D$.
- Si calcolano $p(t_1), \dots, p(t_m)$ allo stesso modo in cui sopra abbiamo calcolato $p(t)$: il costo computazionale è $m(2nA + nM)$.

Quindi il costo complessivo della valutazione di $p(x)$ in m punti è

$$c_m(n) = (n^2 + 2mn + n)A + mnM + \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)D$$

e in totale vengono eseguite $\frac{3}{2}n^2 + 3mn + \frac{3}{2}n$ operazioni.

Osservazione 3. Supponiamo che siano assegnati i punti $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con x_0, x_1, \dots, x_n distinti. I numeri y_0, y_1, \dots, y_n possono sempre essere interpretati come i valori in x_0, x_1, \dots, x_n di una qualche funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un qualche intervallo $[a, b]$ che contiene i punti x_0, \dots, x_n . Pertanto l'algoritmo precedente si applica anche per valutare in un qualsiasi punto $t \in \mathbb{R}$ (o più in generale in una qualsiasi sequenza di punti $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$) il polinomio di interpolazione dei valori y_0, y_1, \dots, y_n sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n , senza bisogno che sia specificata una funzione $f(x)$ tale che $y_i = f(x_i)$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Esempio 3. Consideriamo i dati

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= (0, 0), \\(x_1, y_1) &= (1, 3), \\(x_2, y_2) &= (2, 1), \\(x_3, y_3) &= (3, 1).\end{aligned}$$

Calcoliamo mediante l'algoritmo descritto il valore nel punto $t = 2.3$ del polinomio $p(x)$ che interpola i valori y_0, y_1, y_2, y_3 sui nodi x_0, x_1, x_2, x_3 .

Sia $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione tale che $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$. Calcoliamo le differenze divise secondo lo schema riportato nella Figura 2. Si ha

$$\begin{aligned}f[x_0] &= f(x_0) = 0, \\f[x_1] &= f(x_1) = 3, \\f[x_2] &= f(x_2) = 1, \\f[x_3] &= f(x_3) = 1, \\f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = 3, \\f[x_0, x_2] &= \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = 1/2, \\f[x_0, x_3] &= \frac{f[x_3] - f[x_0]}{x_3 - x_0} = 1/3, \\f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = -5/2, \\f[x_0, x_1, x_3] &= \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = -4/3, \\f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_0, x_1, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_2} = 7/6.\end{aligned}$$

Poniamo ora

$$h_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 7/6$$

e calcoliamo i valori

$$\begin{aligned}h_2 &= f[x_0, x_1, x_2] + (t - x_2)h_3 = -43/20, \\h_1 &= f[x_0, x_1] + (t - x_1)h_2 = 41/200, \\h_0 &= f[x_0] + (t - x_0)h_1 = 943/2000.\end{aligned}$$

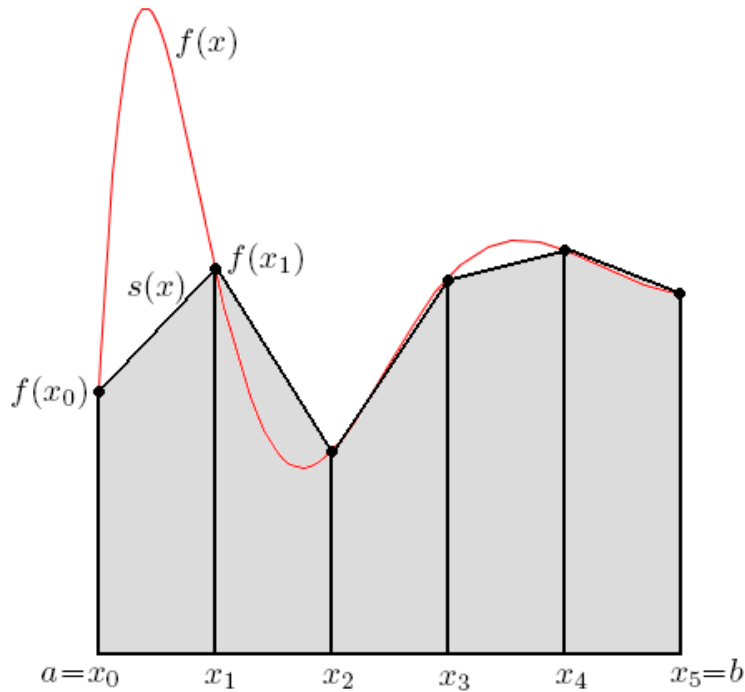


Figura 3: formula dei trapezi per $n = 5$.

In conclusione, il valore in t del polinomio $p(x)$ è $p(t) = h_0 = 943/2000 = 0.4715$.

Esercizio 7. Scrivere un programma in Octave o Matlab che implementa l'algoritmo descritto. Il programma deve prendere in input tre vettori (a componenti reali) $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, $[y_0, y_1, \dots, y_n]$, $[t_1, \dots, t_m]$, con x_0, \dots, x_n tutti distinti, e deve restituire il vettore $[p(t_1), \dots, p(t_m)]$ che contiene le valutazioni nei punti t_1, \dots, t_m del polinomio $p(x)$ interpolante i valori y_0, y_1, \dots, y_n sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n .

1.5 Applicazione dell'interpolazione polinomiale: formula dei trapezi

È data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e si vuole calcolare un'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$. A tal fine si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in $n \geq 1$ sottointervalli tutti della stessa ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$ e si pone $x_j = a + jh$ per ogni $j = 0, 1, \dots, n$. Il valore che si prende come approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ è $\int_a^b s(x)dx$, dove

$$s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{cases} s(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h}(x - x_j), \\ \text{per } x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1, \end{cases}$$

è la funzione lineare a tratti mostrata in Figura 3. Quindi il valore che si prende come approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ è

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b s(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} s(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} h = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [f(x_j) + f(x_{j+1})] \\ &= h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

La (15) prende il nome di *formula dei trapezi di ordine n*. Vogliamo capire qual è l'errore che si commette approssimando $\int_a^b f(x)dx$ con I_n . Per far questo utilizzeremo il seguente lemma.

Lemma 1. Sia $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con $\omega(x) \geq 0$ su $[a, b]$ e siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni tali che $f(x)$ e $g(x)\omega(x)$ sono continue su $[a, b]$ e $\min_{y \in [a, b]} f(y) \leq g(x) \leq \max_{y \in [a, b]} f(y)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Allora esiste un punto $\eta \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b g(x)\omega(x)dx = f(\eta) \int_a^b \omega(x)dx.$$

Dimostrazione. L'idea è quella di considerare $\omega(x)$ come una funzione peso. In quest'ottica il presente lemma è una generalizzazione del teorema della media integrale (si noti che per $\omega(x) = 1$ e $g(x) = f(x)$ si ottiene proprio il teorema della media integrale).

Sia m il minimo di $f(x)$ su $[a, b]$ e M il massimo di $f(x)$ su $[a, b]$. Poiché $\omega(x) \geq 0$ su $[a, b]$ e poiché $m \leq g(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$m \int_a^b \omega(x)dx \leq \int_a^b g(x)\omega(x)dx \leq M \int_a^b \omega(x)dx.$$

Consideriamo la funzione $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $z(y) = f(y) \int_a^b \omega(x)dx$. Questa funzione è continua perché $f(y)$ è continua. Quindi $z(y)$ assume su $[a, b]$ tutti i valori compresi tra il suo minimo, che è $m \int_a^b \omega(x)dx$, e il suo massimo, che è $M \int_a^b \omega(x)dx$. In particolare $z(y)$ assume il valore $\int_a^b g(x)\omega(x)dx$, ovvero esiste $\eta \in [a, b]$ tale che

$$z(\eta) = \int_a^b g(x)\omega(x)dx.$$

Questo prova la tesi. □

Teorema 5. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^2[a, b]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $\int_a^b f(x)dx$. Poniamo $h = \frac{b-a}{n}$. Allora esiste un punto $\eta \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx - I_n = -\frac{(b-a)f''(\eta)}{12}h^2.$$

Dimostrazione. Poniamo $x_j = a + jh$ per $j = 0, 1, \dots, n$ e indichiamo con $s(x)$ la funzione lineare a tratti mostrata in Figura 3, che vale

$$s(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h}(x - x_j), \quad \text{per } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Osserviamo che $s(x)$ coincide su ciascun intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con il polinomio (retta) di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_j, x_{j+1} . Pertanto, per il Teorema 2, per ogni fissato $j = 0, 1, \dots, n$ e per ogni $x \in [x_j, x_{j+1}]$ esiste un punto $\xi_j(x) \in (x_j, x_{j+1})$ tale che

$$f(x) - s(x) = \frac{f''(\xi_j(x))}{2}(x - x_j)(x - x_{j+1});$$

notiamo anche, in vista dell'applicazione che faremo del Lemma 1, che per ogni $x \in [x_j, x_{j+1}]$ risulta

$$\min_{y \in [x_j, x_{j+1}]} f''(y) \leq f''(\xi_j(x)) \leq \max_{y \in [x_j, x_{j+1}]} f''(y)$$

e inoltre la funzione $f''(\xi_j(x)) \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2}$ è continua su $[x_j, x_{j+1}]$, essendo uguale alla funzione continua $s(x) - f(x)$. Si ha allora

$$\int_a^b f(x)dx - I_n = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b s(x)dx = \int_a^b [f(x) - s(x)]dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(x) - s(x)]dx$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f''(\xi_j(x))}{2} (x - x_j)(x - x_{j+1}) dx = - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(\xi_j(x)) \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2} dx \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2} dx \quad (\text{per il Lemma 1; } \eta_j \text{ è un punto in } [x_j, x_{j+1}]) \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) \frac{h^3}{12} = - \frac{h^3}{12} \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) = - \frac{h^3 n}{12} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j) = - \frac{h^2(b-a)}{12} f''(\eta),
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché, essendo $f''(x)$ continua su $[a, b]$ per ipotesi ed essendo la media aritmetica $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)$ un valore compreso tra il minimo e il massimo di $f''(x)$ su $[a, b]$, esiste sicuramente un $\eta \in [a, b]$ tale che $f''(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f''(\eta_j)$. \square

Esempio 4. Consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{\cos x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Non è possibile determinare una primitiva esplicita di $\sqrt{\cos x}$ e quindi non è possibile calcolare esattamente l'integrale $\int_0^1 \sqrt{\cos x} dx$. Stimare l'errore che si commette approssimando questo integrale con la formula dei trapezi di ordine 10, I_{10} , ottenuta suddividendo $[0, 1]$ in $n = 10$ sottointervalli di uguale ampiezza.

Osserviamo che $f \in C^\infty[0, 1]$. Infatti, $\cos x$ non ha zeri su $[0, 1]$, essendo $\cos x \in [\cos 1, 1]$ per ogni $x \in [0, 1]$ ($\cos 1 \approx 0.5403 > 0$); quindi $f \in C^\infty[0, 1]$ come composizione di $\cos x : [0, 1] \rightarrow [\cos 1, 1]$ e $\sqrt{y} : [\cos 1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, entrambe funzioni di classe C^∞ sui loro rispettivi domini $[0, 1]$ e $[\cos 1, 1]$.³ Di conseguenza, $f \in C^2[0, 1]$ e dal Teorema 5 sappiamo che esiste un $\eta \in [0, 1]$ tale che

$$\int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_{10} = - \frac{1 \cdot f''(\eta)}{12} \left(\frac{1}{10} \right)^2 = - \frac{1}{1200} f''(\eta). \quad (16)$$

Calcolando $f''(x)$ si ottiene $f''(x) = - \frac{(\sin x)^2}{4\sqrt{(\cos x)^3}} - \frac{\sqrt{\cos x}}{2}$ e per ogni $x \in [0, 1]$ si ha

$$|f''(x)| \leq \left| \frac{(\sin x)^2}{4\sqrt{(\cos x)^3}} \right| + \left| \frac{\sqrt{\cos x}}{2} \right| \leq \frac{(\sin 1)^2}{4\sqrt{(\cos 1)^3}} + \frac{1}{2} \leq 0.9458.$$

Dunque, dalla (16) si ottiene

$$\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_{10} \right| = \frac{1}{1200} |f''(\eta)| \leq \frac{1}{1200} \max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{1200} 0.9458 \approx 0.0008.$$

Esempio 5. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{\cos x} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon = 10^{-8}$, determinare un n tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di $\int_0^1 \sqrt{\cos x} dx$ con errore $\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_n \right| \leq \epsilon$.

Per il Teorema 5 si ha

$$\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_n \right| = \left| - \frac{1}{12n^2} f''(\eta) \right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2}, \quad (17)$$

dove $\eta \in [0, 1]$. Nell'Esempio 4 abbiamo visto che $\max_{x \in [0, 1]} |f''(x)| \leq 0.9458 \leq 1$ e quindi dalla (17) risulta

$$\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_n \right| \leq \frac{1}{12n^2}. \quad (18)$$

³ Molto diverso è invece il caso della funzione $\sqrt{\cos x} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$; in tal caso $\cos x$ ha uno zero su $[0, \pi/2]$ in $x = \pi/2$ e $\sqrt{\cos x} : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ è composizione di $\cos x : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$ e di $\sqrt{y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, in cui la prima funzione è $C^\infty[0, \pi/2]$, ma la seconda non è neanche $C^1[0, 1]$.

Siccome $\frac{1}{12n^2} \leq \epsilon \Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{1}{12\epsilon}}$, dalla (18) si ha $\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_n \right| \leq \epsilon$ per ogni $n \geq n(\epsilon) := \left\lceil \sqrt{\frac{1}{12\epsilon}} \right\rceil$. Nel nostro caso abbiamo $\epsilon = 10^{-8}$ e quindi, per garantire che $\left| \int_0^1 \sqrt{\cos x} dx - I_n \right| \leq 10^{-8}$, possiamo prendere un qualsiasi $n \geq n(10^{-8}) = 2887$.

Esercizio 8. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon > 0$, determinare un $n = n(\epsilon)$ tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con errore $\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - I_n \right| \leq \epsilon$.

Esercizio 9. Scrivere un programma in Octave o Matlab che prende in input gli estremi a, b di un intervallo, il numero $n \geq 1$ di sottointervalli in cui viene suddiviso $[a, b]$ e una funzione $f(x)$ definita su $[a, b]$ e calcola I_n , l'approssimazione di $\int_a^b f(x) dx$ data dalla formula dei trapezi di ordine n , si veda la (15).

Ricordare che in Octave e Matlab, per definire una funzione $f(x)$, ad esempio la funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$, si può usare il comando

```
> f=@(x) sqrt(cos(x))
```

dopodiché un comando del tipo

```
> f(1/2)
```

fornisce il valore della funzione $f(x)$ nel punto $1/2$.

2 Approssimazione ai minimi quadrati nel discreto⁴

2.1 Il problema generale dei minimi quadrati nel discreto

È data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di cui sono noti soltanto i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ negli $n + 1$ punti distinti $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Fissata una classe \mathcal{C} di funzioni definite su $[a, b]$ a valori in \mathbb{R} , si vuole approssimare la funzione $f(x)$ con una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che appartiene alla classe \mathcal{C} e che minimizza la somma dei quadrati degli errori $|f(x_i) - g(x_i)|$, $i = 0, \dots, n$. In altri termini, si cerca $g \in \mathcal{C}$ tale che

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_2 = \min_{u \in \mathcal{C}} \|\mathbf{f} - \mathbf{u}\|_2, \quad (19)$$

dove per ogni funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ il simbolo grassetto \mathbf{u} denota il vettore di componenti $u(x_i)$, $i = 0, \dots, n$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{bmatrix}.$$

Il caso di interesse nella pratica è quello in cui la classe \mathcal{C} è uno spazio vettoriale di dimensione finita (diciamo $m + 1$), ossia un insieme di funzioni della forma seguente:

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j \phi_j(x) : c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzioni linearmente indipendenti} \right\}. \quad (20)$$

D'ora in avanti supporremo quindi che \mathcal{C} sia l'insieme (20). Notiamo che le funzioni $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ sono una base di \mathcal{C} e quindi ogni $g \in \mathcal{C}$ può essere scritta come combinazione lineare

$$g(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \phi_j(x) \quad (21)$$

⁴Sezione 13 del Capitolo 5 del libro [1].

per un unico vettore $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. Di conseguenza, il problema di determinare una funzione $g(x)$ che risolva il problema di minimo (19) si riconduce al problema di determinare il suo vettore dei coefficienti $\boldsymbol{\alpha}$. Valutando la (21) nei punti $x_i, i = 0, \dots, n$, otteniamo le identità

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^m \alpha_j \phi_j(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

che possono essere riscritte in forma matriciale come

$$\mathbf{g} = \Phi \boldsymbol{\alpha},$$

dove

$$\Phi = [\phi_j(x_i)]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, m}} = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \cdots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_m(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_m(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (m+1)}. \quad (22)$$

In conclusione, per ogni funzione $g \in \mathcal{C}$, detto $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ il suo vettore dei coefficienti rispetto alla base $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ e posto $\mathbf{g} = (g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_n))^T$, si ha $\mathbf{g} = \Phi \boldsymbol{\alpha}$, dove Φ è la matrice (22). Dunque, il problema di trovare $g \in \mathcal{C}$ che soddisfi la (19) si riconduce al problema di trovare $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tale che

$$\|\mathbf{f} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2 = \min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}} \|\mathbf{f} - \Phi \boldsymbol{\beta}\|_2. \quad (23)$$

Il problema (23) viene detto *problema dei minimi quadrati nel discreto*. Ogni sua soluzione $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m+1}$ fornisce tramite la (21) una funzione $g \in \mathcal{C}$ che risolve il problema di minimo (19) e che perciò viene detta *approssimazione ai minimi quadrati nel discreto* della funzione f .

Teorema 6. *Siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti, siano $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni linearmente indipendenti, sia Φ la matrice (22) e sia $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. Il vettore $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m+1}$ soddisfa $\|\mathbf{f} - \Phi \boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \|\mathbf{f} - \Phi \boldsymbol{\beta}\|_2$ per ogni $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}$.
2. Il vettore $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m+1}$ soddisfa $\Phi^T \Phi \boldsymbol{\alpha} = \Phi^T \mathbf{f}$.

In altri termini, le soluzioni $\boldsymbol{\alpha}$ del problema dei minimi quadrati (23) coincidono con le soluzioni del sistema lineare $\Phi^T \Phi \boldsymbol{\alpha} = \Phi^T \mathbf{f}$, detto sistema delle equazioni normali.

Dimostrazione. (1 \implies 2) Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(\boldsymbol{\beta}) = \|\mathbf{f} - \Phi \boldsymbol{\beta}\|_2^2 = \sum_{i=0}^n \left(f_i - \sum_{j=0}^m \Phi_{ij} \beta_j \right)^2. \quad (24)$$

Per ogni $k = 0, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_k}(\boldsymbol{\beta}) &= \sum_{i=0}^n 2 \left(f_i - \sum_{j=0}^m \Phi_{ij} \beta_j \right) (-\Phi_{ik}) = -2 \sum_{i=0}^n (\Phi^T)_{ki} (f_i - (\Phi \boldsymbol{\beta})_i) \\ &= -2 \left(\sum_{i=0}^n (\Phi^T)_{ki} f_i - \sum_{i=0}^n (\Phi^T)_{ki} (\Phi \boldsymbol{\beta})_i \right) = -2 \left((\Phi^T \mathbf{f})_k - (\Phi^T \Phi \boldsymbol{\beta})_k \right) = 2(\Phi^T \Phi \boldsymbol{\beta} - \Phi^T \mathbf{f})_k, \end{aligned}$$

ossia

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{\beta}) = 2(\Phi^T\Phi\boldsymbol{\beta} - \Phi^T\mathbf{f}). \quad (25)$$

Se $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfa $\|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\beta}\|_2$ per ogni $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}$, allora $\boldsymbol{\alpha}$ è un punto di minimo assoluto di φ e dunque deve essere $\nabla\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, cioè $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfa $\Phi^T\Phi\boldsymbol{\alpha} = \Phi^T\mathbf{f}$.

(2 \implies 1) Se $\boldsymbol{\alpha}$ soddisfa $\Phi^T\Phi\boldsymbol{\alpha} = \Phi^T\mathbf{f}$, allora verificheremo che per ogni $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}$ si ha

$$\varphi(\boldsymbol{\beta}) = \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \|\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\|_2^2. \quad (26)$$

Dalla (26) concludiamo che $\varphi(\boldsymbol{\beta}) \geq \varphi(\boldsymbol{\alpha})$ per ogni $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Questo significa che $\boldsymbol{\alpha}$ è un punto di minimo assoluto di φ , ossia $\|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\beta}\|_2$ per ogni $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Per concludere la dimostrazione resta solo da dimostrare la (26).

Dimostrazione della (26).

$$\begin{aligned} \varphi(\boldsymbol{\beta}) &= \|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\beta}\|_2^2 = (\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\beta})^T(\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha} + \Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}))^T(\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha} + \Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})) \\ &= (\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha})^T(\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha})^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T(\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \\ &= \|\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}\|_2^2 + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T(\mathbf{f} - \Phi\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + 2(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T(\Phi^T\mathbf{f} - \Phi^T\Phi\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})^T\Phi^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \quad (\text{perché } \boldsymbol{\alpha} \text{ soddisfa } \Phi^T\Phi\boldsymbol{\alpha} = \Phi^T\mathbf{f}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + (\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}))^T\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \\ &= \varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \|\Phi(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta})\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Esercizio 10. Si consideri la funzione $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definita in (24), il cui gradiente è dato dalla (25). Si verifichi che la matrice Hessiana di φ è la matrice costante data da

$$H\varphi(\boldsymbol{\beta}) = 2\Phi^T\Phi.$$

Perché non giunge inatteso il fatto che $H\varphi(\boldsymbol{\beta})$ sia una matrice semidefinita positiva?

Rimandiamo il lettore a [2, Capitolo 7] per una dimostrazione alternativa del Teorema 6 basata su argomenti di algebra lineare e geometria nello spazio euclideo.

Osservazione 4. Supponiamo che la matrice $\Phi^T\Phi$ sia invertibile (ciò si verifica se e solo se Φ ha rango uguale al suo numero di colonne $m+1$, si veda il Lemma 2). In tal caso, indipendentemente da \mathbf{f} , il sistema delle equazioni normali $\Phi^T\Phi\boldsymbol{\alpha} = \Phi^T\mathbf{f}$ ha un'unica soluzione

$$\boldsymbol{\alpha} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\mathbf{f}. \quad (27)$$

Quindi, per il Teorema 6, esiste un'unico vettore $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m+1}$ che soddisfa il problema dei minimi quadrati (23) e tale vettore $\boldsymbol{\alpha}$ è dato dalla (27). Di conseguenza, esiste un'unica funzione $g \in \mathcal{C}$ che soddisfa il problema di minimo (19) e tale funzione g è data dalla (21) con $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ dato dalla (27).

Lemma 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$. La matrice $A^T A \in \mathbb{R}^{s \times s}$ è invertibile se e solo se A ha rango s .

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$A^T A \text{ è invertibile} \iff \text{rango}(A) = s. \quad (28)$$

Per farlo, dimostreremo la contronominale logica della (28), ovvero

$$A^T A \text{ non è invertibile} \iff \text{rango}(A) < s. \quad (29)$$

Si noti che dire ‘ $\text{rango}(A) \neq s$ ’ è lo stesso che dire ‘ $\text{rango}(A) < s$ ’ in quanto A non può avere rango maggiore di s avendo solo s colonne.

(\Leftarrow) Supponiamo che $\text{rango}(A) < s$. Allora le colonne $A^{(1)}, \dots, A^{(s)}$ di A sono linearmente dipendenti per cui esiste $\beta \in \mathbb{R}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $\beta_1 A^{(1)} + \dots + \beta_s A^{(s)} = \mathbf{0}$, ovvero $A\beta = \mathbf{0}$. Ciò implica che $A^T A\beta = \mathbf{0}$ e dunque $A^T A$ non è invertibile essendo il suo nucleo non ridotto al solo vettore nullo.

(\Rightarrow) Supponiamo che $A^T A$ non sia invertibile, ovvero esiste $\beta \in \mathbb{R}^s \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $A^T A\beta = \mathbf{0}$. Allora risulta $\mathbf{0} = \beta^T A^T A\beta = \|A\beta\|_2^2$, per cui $A\beta = \mathbf{0}$, cioè $\beta_1 A^{(1)} + \dots + \beta_s A^{(s)} = \mathbf{0}$. Questo mostra che le colonne di A sono linearmente dipendenti e quindi $\text{rango}(A) < s$. \square

Osservazione 5. I valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ provengono di solito dal rilevamento di dati sperimentali. Normalmente, essi sono in numero (molto) maggiore rispetto alla dimensione $m + 1$ della classe di funzioni \mathcal{C} dalla quale si vuole estrarre la funzione $g(x)$ che approssima ai minimi quadrati la $f(x)$. Pertanto si ha $m < n$ e la matrice Φ , salvo casi eccezionali, ha rango $m + 1$. Di conseguenza $\Phi^T \Phi$ è invertibile per il Lemma 2 e si applica quanto affermato nell’Osservazione 4.

2.2 Il caso polinomiale

Un caso di primaria importanza nelle applicazioni è quello in cui \mathcal{C} è l’insieme dei polinomi di grado $\leq m$,

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}_m[x] = \left\{ \sum_{j=0}^m c_j x^j : c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \right\}.$$

In tal caso le funzioni $\phi_j(x)$ in (20) sono le funzioni della base canonica di $\mathbb{R}_m[x]$, ovvero

$$\phi_j(x) = x^j, \quad j = 0, \dots, m.$$

La matrice Φ in (22) è data da

$$\Phi = [x_i^j]_{\substack{i=0, \dots, n \\ j=0, \dots, m}} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} =: V_{n,m}(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (m+1)} \quad (30)$$

e si chiama *matrice di Vandermonde* $n \times m$ sui nodi x_0, \dots, x_n .⁵

Proposizione 1. *Siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ punti distinti e sia $m \leq n$. Allora la matrice di Vandermonde $\Phi = V_{n,m}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ha rango $m + 1$.*

Dimostrazione. La sottomatrice costituita dalle prime $m + 1$ righe di Φ è la matrice di Vandermonde quadrata $V(x_0, x_1, \dots, x_m)$. Dalla formula (2) e dal fatto che i punti x_0, x_1, \dots, x_m sono distinti sappiamo che $\det(V(x_0, x_1, \dots, x_m)) \neq 0$. Dunque le prime $m + 1$ righe di Φ sono linearmente indipendenti e si conclude che $\text{rango}(\Phi) = m + 1$ (si noti che $\text{rango}(\Phi)$ non può essere maggiore di $m + 1$ in quando Φ ha solo $m + 1$ colonne). \square

⁵ Si noti che se $m = n$ allora $V_{n,m}(x_0, \dots, x_n)$ non è altro che la matrice di Vandermonde $V(x_0, \dots, x_n)$ incontrata nella Sezione 1.1.

Tempo x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Portata $f(x)$	12.51	13.05	11.7	9.26	8.3	6.25	5.34	4.59	5.14	6.36	10.31	13.88

Tabella 1

Mettendo assieme la Proposizione 1 con l'Osservazione 4, otteniamo il seguente corollario che riassume i risultati dell'approssimazione ai minimi quadrati nel caso polinomiale in cui è $\mathcal{C} = \mathbb{R}_m[x]$.

Corollario 2. *Siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ punti distinti, sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di cui sono noti i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, e sia $m \leq n$. Allora esiste un unico polinomio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m$ in $\mathbb{R}_m[x]$ tale che*

$$\sum_{i=0}^n |f(x_i) - p(x_i)|^2 = \min_{q \in \mathbb{R}_m[x]} \sum_{i=0}^n |f(x_i) - q(x_i)|^2.$$

Il corrispondente vettore dei coefficienti $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ è dato da

$$\boldsymbol{\alpha} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{f},$$

dove $\mathbf{f} = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))^T$ e $\Phi = V_{n,m}(x_0, x_1, \dots, x_n)$ è la matrice di Vandermonde $n \times m$ sui nodi x_0, x_1, \dots, x_n data dalla (30).

Esempio 6. I dati in Tabella 1 si riferiscono alla portata d'acqua di un fiume misurata in m^3/sec . Le misurazioni sono state effettuate a intervalli di tempo regolari di 30 giorni, partendo dal 30 Gennaio di un dato anno preso in esame. Sia f la funzione che ad ogni istante di tempo x associa la portata $f(x)$ del fiume. Poniamo $x = 0$ all'inizio dell'anno considerato e $x = 1$ al tempo della prima misurazione, di modo che l'unità di tempo sia l'intervallo che trascorre tra una misurazione e la successiva. Vogliamo determinare il polinomio $p(x)$ di grado al più 3 di migliore approssimazione ai minimi quadrati per $f(x)$, per $0 \leq x \leq 12$.

In questo esempio è $n = 11$, $x_i = i + 1 \in [0, 12]$ per $i = 0, \dots, n$, i valori $f(x_i)$ sono riportati in Tabella 1, e $m = 3$. Utilizziamo il Corollario 2 per determinare $p(x)$. Si ha

$$\Phi = V_{11,3}(1, 2, \dots, 12) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 12.51 \\ 13.05 \\ 11.7 \\ 9.26 \\ 8.3 \\ 6.25 \\ 5.34 \\ 4.59 \\ 5.14 \\ 6.36 \\ 10.31 \\ 13.88 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{f} \approx \begin{pmatrix} 12.3914 \\ 1.0993 \\ -0.6152 \\ 0.0447 \end{pmatrix}, \quad p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

$$\approx 12.3914 + 1.0993 x - 0.6152 x^2 + 0.0447 x^3.$$

La Figura 4 mette a confronto il polinomio di migliore approssimazione ai minimi quadrati $p(x)$ con il polinomio d'interpolazione $q(x)$ dei dati riportati in Tabella 1 (ossia il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sui nodi $x_i, i = 0, \dots, n$). Si vede chiaramente dalla figura che il polinomio d'interpolazione non è un'approssimazione accettabile di $f(x)$.

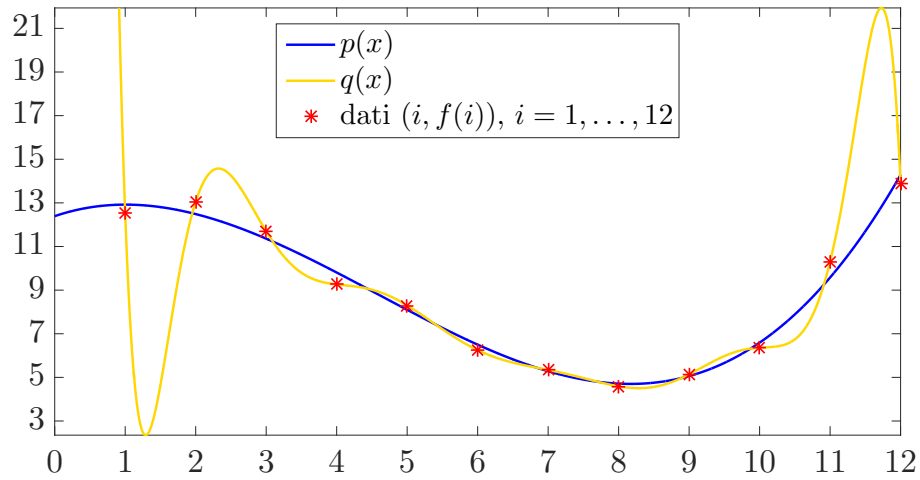


Figura 4: confronto fra il polinomio di migliore approssimazione ai minimi quadrati $p(x)$ e il polinomio d'interpolazione $q(x)$ dei dati riportati in Tabella 1.

Riferimenti bibliografici

- [1] BEVILACQUA R., BINI D., CAPOVANI M., MENCHI O. *Metodi numerici*, Zanichelli (1992).
- [2] BINI D., CAPOVANI M., MENCHI O. *Metodi Numerici per l'Algebra Lineare*. Zanichelli (1988).
- [3] DE BOOR C. *A practical guide to splines*, Springer-Verlag New York (2001).
- [4] GARONI C. *Formula dei trapezi ed estrapolazione*. File pdf.
- [5] STOER J., BULIRSCH R. *Introduction to numerical analysis*. Third edition, Springer-Verlag New York (2002).